FIMPES®

REVISTA DE INVESTIGACIÓN FIMPES: MAYOR CALIDAD, MEJOR FUTURO

Didáctica en la enseñanza de la derivada: aplicaciones de la diferencial

Didactics in Derivative Teaching: Applications of the Differential

María del Socorro Rivera-Casales / Universidad Nacional Autónoma de México & Tecnológico Nacional de México
Ricardo Jacob Mendoza-Rivera / Instituto Politécnico Nacional.

Recibido / Received 03/11/2021
Aceptado / Accepted 20/12/2021

Resumen

El objetivo de la presente investigación es ofrecer un enfoque alternativo en la didáctica de la enseñanza de la derivada a través de aplicaciones de la diferencial. Los resultados muestran que los estudiantes de nivel superior tienen interés en obtener soluciones sencillas a ejercicios a los que regularmente son expuestos en materias de Matemáticas. Los ejercicios planteados comúnmente son operaciones que requieren de una fuerte atención al momento de resolverlos, con la aplicación de la diferencial se busca obtener una solución aproximada muy sencilla, empleando la derivada que comúnmente se enseña en los cursos introductorios de Cálculo Diferencial.

Palabras clave: aplicaciones, diferencial, didáctica

Abstract

The objective of this research is to offer an alternative focus on the didactics of the teaching of derivative through differential applications. The results show that top-level students are interested in getting simple solutions to exercises they are regularly exposed to in math subjects. Commonly considered exercises are operations that require strong attention when solving them, with the application of the differential seeks to obtain a very simple approximate solution, using the derivative that is commonly taught in the introductory courses of Differential Calculation.

Key words: *applications, differential, didactic.*

María del Socorro Rivera-Casales. socorro.rivera@enp.unam.mx; ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7696-2271
Ricardo Jacob Mendoza-Rivera. ricardo.mendoza.ipn@gmail.com: ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8422-6442

Introducción

Usualmente los maestros de Matemáticas se enfrentan al desinterés de los alumnos por el enfoque en la enseñanza de temas primordiales en materias que se consideran fundamentales para su aprendizaje. En particular en la materia de Cálculo Diferencial, la clave del aprendizaje es la derivada, pues de allí se desprenden herramientas de análisis, aplicación y solución de problemas de las carreras universitarias del estudiante, entendiéndose una amplia gama de profesiones que requieren este concepto.

Es importante establecer una didáctica adecuada por parte del profesor para el desarrollo del pensamiento y de las competencias de los alumnos. Moreno (2005) señala que el profesor es fundamental para lograr el éxito y necesario para implementar una propuesta didáctica con origen en la investigación en sí.

Por otro lado, es relevante señalar que la práctica docente de los profesores en Matemáticas juega un papel importante para desarrollar actividades que logren el objetivo del curso, brindar a los estudiantes las herramientas de la materia para su comprensión y entendimiento, Ponte & Chapman (2006) agrupan en las siguientes categorías la formación de los profesores de matemáticas:

1. Conocimiento matemático de los profesores.
2. Conocimiento de los profesores para la enseñanza de las matemáticas.
3. Creencias y concepciones de los profesores.
4. La práctica del profesor.

Por otro lado Pino-Fan, D. Godino, & Font (2010) señalan que las investigaciones sobre la enseñanza de la derivada se pueden clasificar en:

1. Empleando las Tecnologías de la Información y Comunicación (TICs)
2. Empleando el uso de problemas de aplicación, introduciéndolo a través de problemas.

La presente investigación se centra en la segunda clasificación, donde el objetivo es ofrecer un enfoque alternativo en la didáctica de la enseñanza de la derivada a través de aplicaciones de la diferencial.

Descripción de la didáctica.

Las secuencias constituyen una organización de las actividades de aprendizaje que se realizarán con los alumnos y para los alumnos con la finalidad de crear situaciones que les permitan desarrollar un aprendizaje significativo. Para acompañar al docente en esta responsabilidad permanente presentamos una guía que le permitirá la construcción de secuencias didácticas que respondan a esta perspectiva didáctica.

Estructura de una Secuencia Didáctica

La secuencia didáctica es el resultado de establecer una serie de actividades de aprendizaje que tengan un orden interno entre sí, con ello se parte de la intención docente de recuperar aquellas nociones previas que tienen los estudiantes sobre un hecho, vincularlo a situaciones problemáticas y de contextos reales con el fin de que la información a la que va a acceder el estudiante en el desarrollo de la secuencia sea significativa (Brousseau, 2007).

1. La estructura de la secuencia se integra:
2. Actividades de apertura. El sentido de las actividades de apertura es variado en un primer momento permiten abrir el clima de aprendizaje.
3. Actividades de desarrollo. Las actividades de desarrollo tienen la finalidad de que el estudiante interaccione con una nueva información.
4. Actividades de cierre. Las actividades de cierre se realizan con la finalidad de lograr una integración del conjunto de tareas realizadas.
5. Línea de evaluación para el aprendizaje. En realidad, el papel de la evaluación y la forma de materializarla en evidencias, lo hemos desarrollado en lo que denominamos línea de secuencias de aprendizaje (Anijovich R, 2010).

Marco conceptual

En cada ejercicio se pretende una buena reproducción por el alumno de una actividad científica que exige que intervengan, formulen, prueben, construyan modelos, lenguajes, conceptos, teorías y que intercambien con otros sus experiencias donde consideren lo que es más útil para cada uno (Brousseau, 1986).

El concepto se plantea en la siguiente secuencia didáctica:

1. **Actividades de apertura**. Se inicia dando una definición de la derivada.
   Definición. Consideremos la siguiente ilustración en donde aproximamos a la función f por su recta tangente (Courant, 2002).

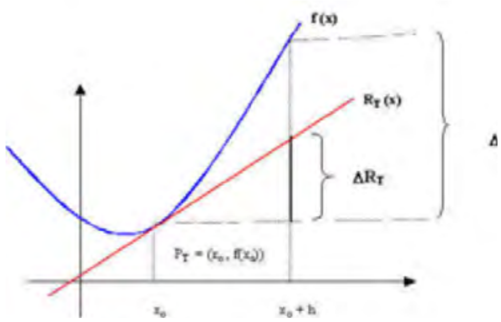

Imagen 1 Aproximación a la recta tangente a una curva
Fuente: Elaboración propia basada en (Courant, 2002)

Actividades de desarrollo. Se explica explica la idea del concepto de diferencial a través de la derivada.
Considerando que la recta tangente es la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en las cercanías del punto de tangencia PT, si le llamamos $\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0)$ a la variación de f cuando x varía de x_0 a x_0+h y R_T a la variación de la recta tangente en el mismo rango de variación en x, podemos afirmar que para valores de h "cercanos" a 0, estas dos variaciones son muy parecidas, es decir, $\Delta f \approx \Delta R_T$ Podemos expresar a ΔR_T en términos de h y el ángulo θ que forma la recta tangente con el eje de las abscisas. En el triángulo de la figura, que extraemos a continuación, se observa lo siguiente:

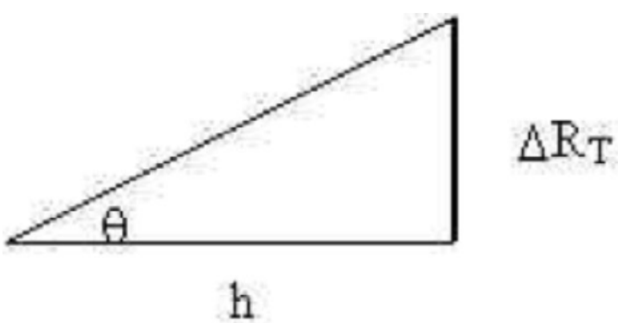

Imagen 2 Aproximación de la diferencial
Fuente: Elabroación propia

Notemos que:

$$tan(\theta) = \frac{\Delta R_T}{h} \approx \Delta R_T = tan(\theta)\ h \approx \Delta R_T = f\,'(x_0)h$$

En virtud de que $\boldsymbol{\Delta R_T}$ es un aproximador de la DIFERENCIA $\boldsymbol{f}$, lo definiremos como el DIFERENCIAL de f en el punto $\boldsymbol{x}_0$, con respecto al incremento h y lo denotaremos por df, es decir:

$$df = f\,'(x_0)h$$

Observación: El diferencial, en general depende de h y del punto $\boldsymbol{x}_0$.

2. **Actividades de cierre**. Se plantea un ejemplo sencillo
   Por ejemplo, el diferencial de $f(x) = x^2$ es:
   $$df = f\,'(x_0)h = (2x_0)h$$
   que también lo podemos expresar como:
   $$d(x2) = (2x_0)h$$

3. **Línea de evaluación para el aprendizaje**. Para la resolución de casos específicos, se plantean una serie de ejercicios.

Si especificamos el punto x_0, el diferencial dependerá únicamente de h, como se aprecia en los siguientes ejemplos.

a) El diferencial de
$f(x) = x^2 \quad en \quad x_0 = 3 \quad es \quad d(x^2) = 6h$

b) El diferencial de
$f(x) = x^2 \quad en \quad x_0 = 7 \quad es \quad d(x^2) = 14h$

c) El diferencial de
$f(x) = x^3 \quad en \quad x_0 = 2 \quad es \quad d(x^3) = 12h$

En el caso de la función identidad $f(x) = x$, como $f\,'(x_0) = 1$ para todo x_0, su diferencial nos queda como $df = f\,'(x_0)h = h$ o bien $dx = h$

Como *h* es el diferencial de la función identidad, podemos re-escribir el diferencial de una función *f* derivable en $\boldsymbol{x}_0$, como:

$$\boldsymbol{df = f'(x_0)dx}$$

Esta expresión nos dice que la variación de una función f es aproximadamente proporcional a la variación de su variable independiente, donde la constante de proporcionalidad es la derivada en el punto en cuestión.

Metodología.

Para la realización de las actividades se utilizó como método que las diferenciales pueden utilizarse para aproximar valores de funciones. Para ello, supóngase que en la función y = $f(x)$, cuando se da a "x" un incremento de Δx, la variable "y" recibe un incremento Δy, que puede considerarse como un valor aproximado de "dy" (Conamat, 2007). Por lo tanto, el valor aproximado de $f(x+\Delta x)$ es:

$$f(x+\Delta x) \equiv y + \Delta y \equiv y + f'(x)\,dx \equiv y + dy \qquad (1)$$

El proceso de la investigación consistió en un proceso documental que pretende identificar las definiciones que proponen los libros texto, así como el inventario del tipo de ejemplos y ejercicios que presentan. Por otro lado, se realizan observaciones en el aula para poder familiarizarse en la forma de trabajo con los estudiantes de nivel superior.

Es necesario en la enseñanza-aprendizaje bien organizada que los docentes e investigadores busquen estrategias diferentes, secuencias fundamentadas, materiales didácticos (digitales o manuales), situaciones didácticas novedosas, para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, motivando a los alumnos a realizar actividades diferentes a las acostumbradas. Así se lograría reducir el rezago y se mejoraría el razonamiento lógico-matemático que apoya el desarrollo de capacidades cerebrales a través de la conexión mente-cuerpo por medio del movimiento.

Se presenta la figura de la construcción del triángulo didáctico en la enseñanza-aprendizaje, para ayudar en la organización de la enseñanza-aprendizaje en aula.

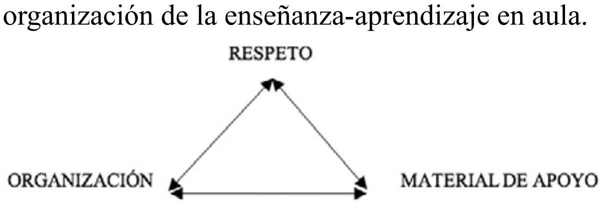

Imagen 3 Construcción del triángulo didáctico en la enseñanza-aprendizaje

Cada vértice tiene una razón en el trabajo continuo del aula.

1. **RESPETO** al entorno: seres humanos, trabajo en escuela, alumnos, autoridades e institución.
2. **ORGANIZACIÓN** al conocimiento (enseñanza-aprendizaje) en cada especialidad del docente, su experiencia y el gusto por enseñar y aprender.
3. **MATERIAL DE APOYO**, cada docente planea su curso con las estrategias y empleando material de apoyo de diferentes formas, como son: notas clase, TICs, libros, artículos, investigación, resolución de ejercicios, lectura de comprensión, resúmenes, entre otros.

Resultados empíricos

La investigación apunta a una comprensión deficiente de la diferencial con los medios utilizados en la enseñanza (se observa en el trabajo de aula real), se considera a los contenidos de la diferencial poco importantes para el nivel superior en ciertas carreras (la importancia la señalamos en el aprendizaje significativo).

Tipos de aprendizaje (Díaz Barriga Arceo, 2010):
a) **Significativo**:

- Receptivo. Relaciones entre conceptos.
- Por descubrimiento guiado. Instrucción bien diseñada.
- Por descubrimiento autónomo. Investigación científica.

b) **Memorístico**:

- Receptivo. Algoritmos matemáticos.
- Por descubrimiento guiado. Aplicación de fórmulas.
- Por descubrimiento autónomo. Solución de acertijos.

Resultados de aprendizaje del cuestionario diagnóstico de conocimientos preliminares (se realizaron diez ejercicios a resolver de forma tradicional): tienen un dominio del 68% en aprendizaje memorístico receptivo, un 84% en aprendizaje por descubrimiento guiado y un 28% en aprendizaje por descubrimiento autónomo, el 92% alumnos no logran alcanzar niveles de competencia de excelencia por tener un aprendizaje memorístico receptivo y el 8% tiene un aprendizaje memorístico por descubrimiento autónomo, el tiempo máximo para su solución fue de 53 minutos, el mínimo es de 25 minutos y el promedio de tiempo para resolver el cuestionario fue de 39 minutos.

Conclusiones

Como solución de aproximación de operaciones mediante la aplicación de la diferencial, se comprueba que son más rápidas creando un pensamiento lógico y reflexivo. Se observa de una forma particular en los estudiantes del nivel medio superior una respuesta clara de para que me sirve estudiar este tema y sobre todo aplicaciones sencillas y útiles en la vida cotidiana; como es el caso de las finanzas.

Es importante reconocer los esfuerzos de las comunidades académicas nacionales e internacionales por replantear el paradigma de la educación y dar soluciones distintas a los problemas en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Es necesario que los docentes e investigadores busquen estrategias diferentes, secuencias fundamentadas, materiales didácticos (digitales o manuales), situaciones didácticas novedosas, para mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, motivando a los alumnos a realizar actividades diferentes a las acostumbradas. Así se lograría reducir el rezago y mejorar el razonamiento lógico-matemático que apoya el desarrollo de capacidades cerebrales a través de la conexión mente-cuerpo por medio del movimiento.

En el artículo se plantea la organización del proyecto mediante la construcción del triángulo de conocimiento, para ayudar en la organización de la enseñanza-aprendizaje en el aula.

Agradecimientos

A las instituciones, las personas involucradas para el desarrollo de la presente investigación y a los lectores.

Referencias

Anijovich, R (2010). La evaluación significativa. Buenos Aires, Paidós

Brousseau, G (2007) Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas. Buenos Aires, Libros Zorzal

Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática. Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).

Caro, V. (1936). Los números: su historia, sus propiedades, sus mentiras y verdades. Bogotá: Minerva.

Conamat. (2007). Matemáticas Simplificadas. México: Pearson.

Courant, R. (2002). Conceptos y métodos fundamentales. Fondo de Cultura Económica. México.

Díaz Barriga Arceo, F. (2010). Los profesores ante las innovaciones curriculares. Revista iberoamericana de educación superior, 1(1), 37-57.

Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: Evolución, estado actual y retos futuros. IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), (págs. 81-96). Universidad de Córdoba, España.

Pino-Fan, L., D. Godino, J., & Font, V. (2010). Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada. XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, (págs. 206-216). Monterrey.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. (Vols. Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future). A. Gutierrez y P. Boero (Eds.),

Apéndice 1

Propuesta de actividades a desarrollar con los estudiantes.

Actividad 1:

Determinar el valor aproximado de $\sqrt{25.020}$

Solución: se asocia a la operación la siguiente función: $y=\sqrt{x}$

Se busca un valor "x" próximo a 25.020, cuya raíz cuadrada sea exacta, en este caso x=25, $y=\sqrt{25}=5$; las veinte milésimas restantes se toman como la diferencial de la variable "x".

$$dx=0.020=\frac{1}{50}$$

Se obtiene su diferencial:

$$dy=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=\frac{1}{2\sqrt{25}}\circ\frac{1}{50}=\frac{1}{500}$$

Los valores se evalúan en la fórmula:

$$f(x+\quad x)\cong y+dy$$

$$\sqrt{25.020}=\sqrt{25+0.20}\cong 5+\frac{1}{500}\cong\frac{2501}{500}\cong 5.002$$

Por consiguiente:

$$\sqrt{25.020}\cong 5.002$$

Actividad 2:

Obtén el valor aproximado de cos 40°

Solución: La función asociada a la operación es:

$$y=\cos x$$

Se busca un valor "x" próximo a 40°, en este caso $x=30°=\frac{\pi}{6},y=\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}ylos10°=\frac{\pi}{18}$
Restantes es el valor de la diferencial "x".

$$dx=\frac{\pi}{18}$$

Se obtiene su diferencial:

$$dy=-senxdx=(-sen30°)(\frac{\pi}{18})=(-\frac{1}{2})(\frac{\pi}{18})=-\frac{\pi}{36}$$

Los valores se evalúan en la fórmula:

$$f(x+\Delta x)\cong y+dy$$

$$\cos 40°\cong\cos(30°+10°)\cong\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{36}\cong 0.778758941$$

Finalmente:

$$\cos 40°\cong 0.77875$$